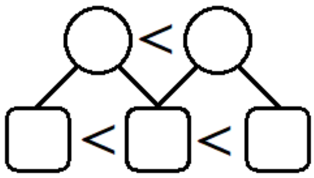
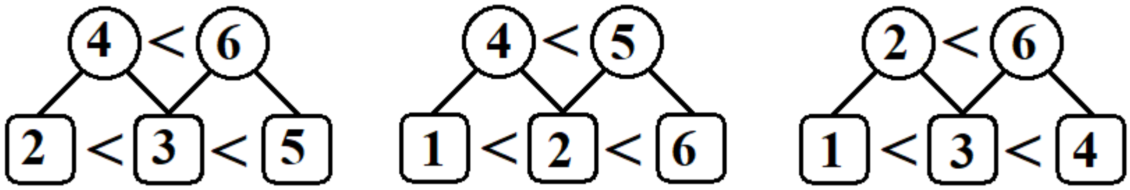
1.7. Поставете пет различни числа измежду числата 1, 2, 3, 4, 5 и 6 в двете кръгчета и трите квадратчета със спазване на знаците за по-малко и по-голямо така, че сборът на числата в кръгчетата да е равен на сбора на числата в квадратчетата. По колко начина може да стане това?



Решение:



<u>Първи случай</u>: не участва числото 1. Сборът на останалите числа 2, 3, 4, 5 и 6 е 20. При това 20 = 10 + 10 и единствената възможност е в кръгчетата да се запишат 4 и 6 (4 < 6), а в квадратчетата да се запишат 2, 3 и 5 (2 < 3 < 5). **(3 точки)**

<u>Втори случай</u>: не участва числото 2. Сборът на останалите числа 1, 3, 4, 5 и 6 е 19. Тъй като 19 не може да се представи като сбор на две равни числа, този случай не води до решение.

<u>Трети случай</u>: не участва числото 3. Сборът на останалите числа 1, 2, 4, 5 и 6 е 18. При това 18 = 9 + 9 и единствената възможност е в кръгчетата да се запишат 4 и 5 (4 < 5), а в квадратчетата да се запишат 1, 2 и 6 (1 < 2 < 6). **(3 точки)**

<u>Четвърти случай</u>: не участва числото 4. Сборът на останалите числа 1, 2, 3, 5 и 6 е 17. Тъй като 17 не може да се представи като сбор на две равни числа, този случай не води до решение.

<u>Пети случай</u>: не участва числото 5. Сборът на останалите числа 1, 2, 3, 4 и 6 е 16. При това 16 = 8 + 8 и единствената възможност е в кръгчетата да се запишат 2 и 6 (2 < 6), а в квадратчетата да се запишат 1, 3 и 4 (1 < 3 < 4). **(3 точки)**

<u>Шести случай</u>: не участва числото 6. Сборът на останалите числа 1, 2, 3, 4 и 5 е 15. Тъй като 15 не може да се представи като сбор на две равни числа, този случай не води до решение.

Общо **1 точка** за разглеждане на втори, четвърти и шести случаи, които не водят до решение.

2.7. Асен, Борис, Виктор и Георги имат общо 47 колички. Борис има с 3 колички повече от Георги, количките на Виктор са два пъти повече от тези на Георги, а Асен има три пъти повече колички от Борис.

а) Намерете по колко колички има всеки от четиримата.

б) Количките на Борис са зелени и сини, количките на Виктор са червени и сини, а тези на Георги са жълти и сини. Асен има толкова зелени колички, колкото и Борис, толкова червени колички, колкото и Виктор, толкова жълти колички, колкото и Георги, като освен това има и 4 сини колички. Намерете по колко колички има от всеки цвят.

Решение: **Отг. а) Асен – 24 колички, Борис – 8 колички, Виктор – 10 колички, Георги – 5 колички.**

Броят на количките на всеки от четиримата изобразяваме с отсечки по следния начин:

Георги	├───┤
Виктор	├───┤ ├───┤
Борис	├───┤ + 3
Асен	├───┤ ├───┤ ├───┤ + 9

(3 точки)

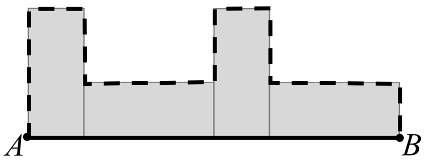
Отсечките са общо 7 и тъй като всички колички са 47, то седемте отсечки съответстват на 47 – (3 + 9) = 35 колички **(1 точка)**. Тогава на една отсечка съответстват 35 : 7 = 5 колички **(1 точка)**. Получаваме, че Георги има 5 колички, Виктор има 2 . 5 = 10 колички, Борис има 5 + 3 = 8 колички и Асен има 3 . 5 + 9 = 24 колички **(1 точка)**.

Забележка: Ако задачата е решена с въвеждане на неизвестно и разсъжденията са верни, решението се оценява с пълен брой точки.

б) **Отг. 7 сини, 14 зелени, 18 червени и 8 жълти.**

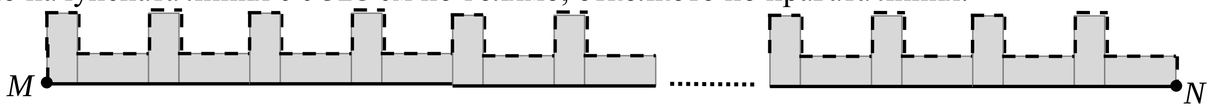
Асен има общо 24 – 4 = 20 зелени, червени и жълти колички. От условието следва, че Борис, Виктор и Георги имат общо 20 зелени, червени и жълти колички. Тъй като те имат общо 8 + 10 + 5 = 23 колички, то сините колички на тримата са 23 – 20 = 3. Заключаваме, че всеки от тях има точно 1 синя количка **(2 точки)**. Тогава Борис има 8 – 1 = 7 зелени колички, Виктор има 10 – 1 = 9 червени и Георги има 5 – 1 = 4 жълти **(1 точка)**. Общо по цветове количките са 4 + 3 = 7 сини, 7 . 2 = 14 зелени, 9 . 2 = 18 червени и 4 . 2 = 8 жълти **(1 точка)**.

3.7. Фигурата на чертежа е образувана от четири еднакви правоъгълника, разположени последователно вертикално, хоризонтално, вертикално и пак хоризонтално. Разстоянието от върха A до върха B по права линия е равно на 26 см, а по начупената линия, очертана с пунктир, е 48 см.



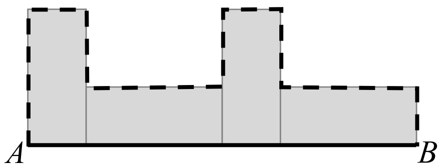
а) Намерете размерите на един от правоъгълниците.

б) Фигурата по-долу е получена от много на брой такива правоъгълници, разположени по същия начин. Намерете броя им, ако разстоянието от върха M до върха N по начупената линия е с 328 см по-голямо, отколкото по правата линия.



Решение:

а) Нека размерите на един правоъгълник са a и b ($a > b$). Тогава от условието

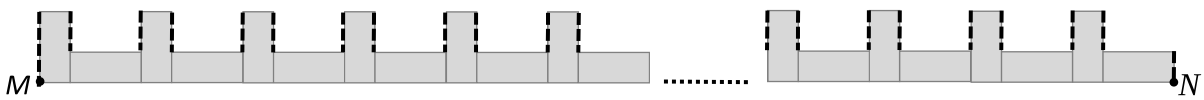


$AB = 2 \,.\, (a + b) = 26$ см и $a + b = 13$ см. (**1 точка**)

Дължината на начупената линия от A до B е равна на 6 пъти a, т.е. $6 \,.\, a = 48$ см и $a = 8$ см. (**2 точки**)

Тогава $b = 13 – 8 = 5$ см. (**1 точка**)

б) Върху правата линия между M и N на всяка дължина и широчина на правоъгълник съответства противоположната дължина и противоположната широчина на същия правоъгълник от начупената линия. Отсечките от начупената линия, на които не са съответни на дължини или широчини от правата линия, са очертани с пунктир на



чертежа. Те са: 1 отсечка с дължина $a = 8$ см (първата най-вляво), една отсечка с дължина $b = 5$ см (последната най-вдясно) и отсечки с дължина $a – b = 3$ см. (**2 точки**) Общата дължина на тези отсечки по 3 см е $328 – 8 – 5 = 315$ см, а броят им е $315 : 3 = 105$. (**2 точки**)

На всеки правоъгълник можем да съпоставим по една такава отсечка с дължина 3 см с изключение на последния правоъгълник. Следователно броят на правоъгълниците е 106. (**2 точки**)

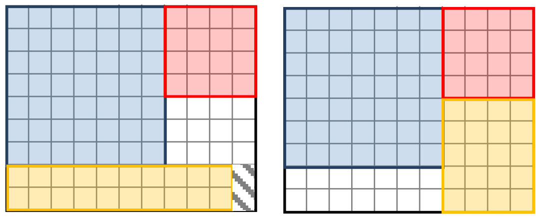
4.7. Правоъгълник с размери 11 см и 9 см е разрязан на 5 квадрата и на един правоъгълник, който не е квадрат. Ако дължините на страните на квадратите в сантиметри са различни естествени числа, да се намери обиколката на правоъгълника.

Решение:

Страната на най-големия квадрат е най-много 9 см.

1 случай. Ако страната на най-големия квадрат е 9 см, могат да се изрежат само още 2 квадрата – със страни 1 см и 2 см. Следователно страната не може да е 9 см.

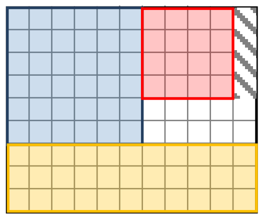
2 случай. Ако страната на най-големия квадрат е 8 см, могат да се изрежат само още 3 квадрата – със страни 1 см, 2 см и 3 см. Следователно страната не може да е и 8 см. **(1 точка)**



3 случай. Ако страната на най-големия квадрат е 7 см, то другите квадрати са със страни 4 см, 3 см, 2 см и 1 см. Квадратите със страни 7 см и 4 см могат да се изрежат по единствен начин. Лицето на правоъгълника е равно на 11 . 9 – (1 .1 + 2 . 2 + 3 . 3 + 4 . 4 + 7 . 7) = 20 кв. см. Размерите на такъв правоъгълник могат да са 2 см и 10 см или 4 см и 5 см. Правоъгълникът с размери 2 см и 10 см също може да се изреже по единствен начин и остава ивица с ширина 1 см, от която може да се изреже квадратът със страна 1 см, но от останалата част на ивицата не може да се изреже друг квадрат. Аналогично и правоъгълник с размери 4 см и 5 см се изрязва по единствен начин и от оставащата част не може да се изреже квадрат със страна 3 см. Следователно страната на най-големия квадрат не може да е 7 см.

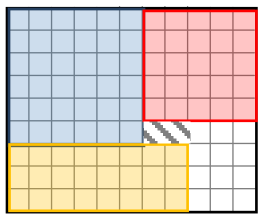
(2 точки)

4 случай. Ако страната на най-големият квадрат е 6 см, тогава за другите четири квадрата има 5 възможности:



4.1. Страните им са 4 см, 3 см, 2 см и 1 см. Тогава лицето на правоъгълника е равно на 11 . 9 – (1 .1 + 2 . 2 + 3 . 3 + 4 . 4 + 6 . 6) = 33 кв. см и размерите му могат да са само 3 см и 11 см. Този правоъгълник и квадратът със страна 6 см могат да се изрежат по единствен начин и както и да изрежем квадрата със страна 4 см, остава ивица с ширина 1 см, от която може да се изреже квадратът със страна 1 см, но от останалата част на ивицата не може да се изреже друг квадрат.

(1 точка)



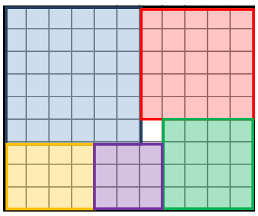
4.2. Страните им са 5 см, 3 см, 2 см и 1 см. Тогава лицето на правоъгълника е равно на 11 . 9 – (1 .1 + 2 . 2 + 3 . 3 + 5 . 5 + 6 . 6) = 24 кв. см и размерите му могат да са 3 см и 8 см или 4 см и 6 см. Квадратите със страни 6 см и 5 см могат да се изрежат по единствен начин. Тогава правоъгълник с размери 4 см и 6 см не може да се изреже. Ако правоъгълникът е с размери 3 см и 8 см, остава ивица с ширина 1 см, от която може да се изреже квадратът със страна 1 см, но от останалата част на ивицата не може да се изреже друг квадрат.

(1 точка)

4.3. Страните им са 5 см, 4 см, 2 см и 1 см. Тогава лицето на правоъгълника е равно на

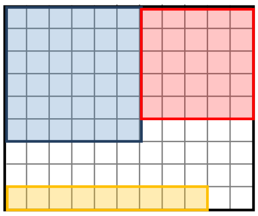
11 . 9 – (1 .1 + 2 . 2 + 4 . 4 + 5 . 5 + 6 . 6) = 17 кв. см и размерите му могат да са само 1 см и 17 см. Но такъв правоъгълник не може да се изреже от дадения.
(1 точка)

4.4. Страните им са 5 см, 4 см, 3 см и 1 см. Тогава лицето на правоъгълника, който трябва да остане, е равно на 11 . 9 – (1 .1 + 3 . 3 + 4 . 4 + 5 . 5 + 6 . 6) = 12 кв. см и размерите му могат да са 3 см и 4 см или 2 см и 6 см. Квадратите със страни 6 см и 5 см могат да се изрежат по единствен начин. Както и да изрежем правоъгълника с размери 2 см и 6 см, ще остане ивица с ширина 1 см или 2 см, от която не могат да се изрежат останалите квадрати.



(1 точка)

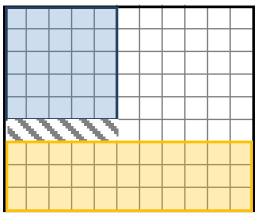
Ако правоъгълникът е с размери 3 см и 4 см, останалите квадрати могат да се изрежат, както се вижда от примера. **(1 точка)**



4.5. Страните им са 5 см, 4 см, 3 см и 2 см. Тогава лицето на правоъгълника е равно на

11 . 9 – (2 . 2 + 3 . 3 + 4 . 4 + 5 . 5 + 6 . 6) = 9 кв. см

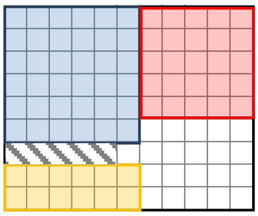
и размерите му могат да са 1 см и 9 см. Квадратите със страни 6 см и 5 см могат да се изрежат по единствен начин. Както и да изрежем правоъгълника, няма да можем да изрежем квадрат със страна 4 см

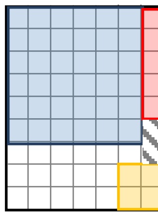


(1 точка)

5 случай. Ако страната на най-големият квадрат е 5 см, тогава другите квадрати са със страни 4 см, 3 см, 2 см и 1 см. Лицето на правоъгълника, който трябва да остане, е равно на

11 . 9 – (1 .1 + 2 . 2 + 3 . 3 + 4 . 4 + 5 . 5) = 44 кв. см.





Единственият правоъгълник с такова лице, който можем да изрежем от дадения, е с размери 4 см и 11 см. Той може да се изреже по единствен начин. След като изрежем квадрата със страна 5 см, остава ивица с ширина 1 см и исканите квадрати не могат да се изрежат.
(1 точка)

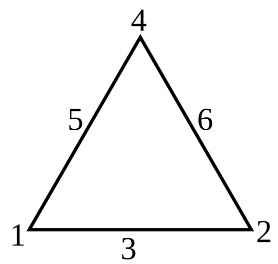
Окончателно, задачата има единствено решение. Правоъгълникът е с размери 4 см и 3 см, а обиколката му е 14 см.

5-6.7. Във върховете и върху страните на n-ъгълник се поставят различни естествени числа от 1 до $2n$ така, че числото върху всяка страна на n-ъгълника да е равно на сбора на числата в двата върха, които определят тази страна. Възможно ли е това, ако:

а) $n = 3$; б) $n = 5$; в) $n = 6$?

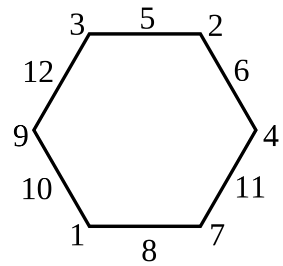
Решение:

а) **2 точки**



б) **3 точки**. Нека s_5 е сборът на числата във върховете на петоъгълник с исканите свойства. Тогава сборът на числата върху страните е $2s_5$, защото числата във върховете се броят два пъти. Следователно $3s_5 = \frac{(1+10).10}{2} = 55$, което не е възможно, защото 55 не се дели на 3. Заключаваме, че такъв петоъгълник не съществува.

в) **5 точки**

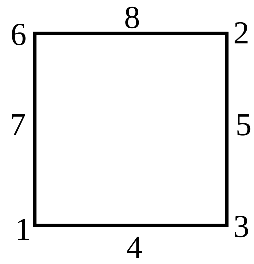


7-8.7. Във върховете и върху страните на n-ъгълник се поставят различни естествени числа от 1 до $2n$ така, че числото върху всяка страна на n-ъгълника да е равно на сбора на числата в двата върха, които определят тази страна. Възможно ли е това, ако:

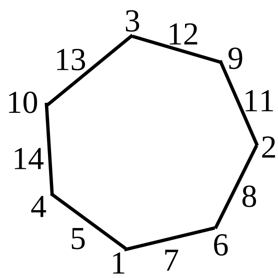
а) $n = 4$; б) $n = 7$; в) $n = 8$?

Решение:

а) **3 точки**



б) **5 точки**



в) **2 точки**. Нека s_8 е сборът на числата във върховете на осмоъгълник с исканите свойства. Тогава сборът на числата върху страните е $2s_8$, защото числата във върховете се броят два пъти. Следователно $3s_8 = \frac{(1+16).16}{2} = 17.8 = 136$, което не е възможно, защото 136 не се дели на 3. Заключаваме, че такъв осмоъгълник не съществува.

9-10.7. Дадена е редицата $\{a_n\}$, за която $a_1 = a_2 = 1$ и $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1$ за $n \geq 1$. Да се докаже, че числото $a_n - 3$ е съставно за всяко $n > 6$.

Решение: За ориентиране в задачата пресмятаме членовете на редицата за малки стойности на *n*. Имаме:

$a_1 = 1$, $a_2 = 1$; $a_3 = 1+1 = 2$; $a_4 = 1.2+1 = 3$; $a_5 = 2.3+1 = 7$; $a_6 = 3.7+1 = 22$; $a_7 = 7.22+1 = 155$; $a_8 = 22.155+1 = 3411$; $a_9 = 155.3411+1 = 528\,706$ и т.н. Ясно е, че $a_7 - 3$ и $a_8 - 3$ са съставни, защото са четни (като разлики на нечетни) (**2 точки**). Разсъжденията за следващите членове на редицата се затрудняват, защото числата стават доста големи.

Ясно заявена идея за доказване, че $a_n - 3$ се дели на число, което зависи от *n*, се оценява с (**3 точки**). Реализацията на идеята, както това е направено по-долу, се оценява с (**5 точки**).

Да забележим, че

$$a_{n+1} = a_{n-1}a_n + 1 \equiv 1 \pmod{a_n},$$

$$a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1 \equiv 1 \pmod{a_n},$$

$$a_{n+3} = a_{n+1}a_{n+2} + 1 \equiv 1.1+1 = 2 \equiv 2 \pmod{a_n},$$

$$a_{n+4} = a_{n+2}a_{n+3} + 1 \equiv 1.2+1 = 3 \equiv 3 \pmod{a_n},$$

$$a_{n+5} = a_{n+3}a_{n+4} + 1 \equiv 2.3+1 = 7 \equiv 7 \pmod{a_n}$$

и т.н., но е достатъчно да използваме само факта, че $a_{n+4} \equiv 3 \pmod{a_n}$ и следователно $a_{n+4} - 3 \equiv 0 \pmod{a_n}$. Това показва, че $a_{n+4} - 3$ се дели на a_n, т.е. то е съставно, защото $a_n > 1$ при $n > 2$.

11-12.7. Нека n е нечетно число. Да се намери възможно най-големият брой числа (не задължително различни и цели), които могат да се подредят в редица така, че сумата на всеки n на брой последователни числа да е отрицателна, а сумата на всеки $n+2$ на брой последователни числа да е положителна.

Решение: Максималният брой е $2n$ (**1 точка**). Ако допуснем противното, бихме могли да изберем $2n+1$ числа a_1, a_2, …, a_{2n+1}, които в този ред изпълняват условието на задачата. Да разгледаме таблицата по-долу.

a_1	a_2	…	…	a_{n+1}	a_{n+2}
a_2	a_3	…	…	a_{n+2}	a_{n+3}
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
a_{n-1}	a_n	…	…	a_{2n-1}	a_{2n}
a_n	a_{n+1}	…	…	a_{2n}	a_{2n+1}

Съгласно условието, сумата на числата в таблицата по стълбове е отрицателна, а по редове тя е положителна и това е невъзможно. (**4 точки**)

Остава да дадем пример на $2n$ числа с исканото свойство. Такива примери има много. Един от възможните е този, при който числата $-n$ и $n+2$ се редуват алтернативно както в първата, така и във втората половина:

$$\underbrace{-n,\ n+2,\ -n,\ n+2,\dots,n+2,\ -n}_{n\ \text{на брой}}\ ,\ \underbrace{-n,\ n+2,\ -n,\ n+2,\dots,n+2,\ -n}_{n\ \text{на брой}}\ .$$

Наличието на верен пример се оценява с (**5 точки**).